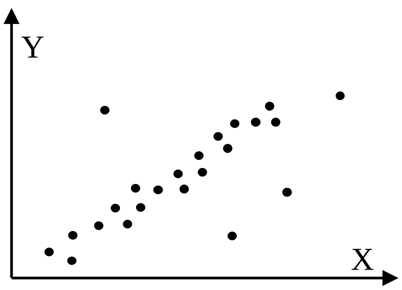
Robust İstatistik ve Robust Kestirim Yöntemi

Robust (sağlam) istatistik, teknik olmayan bir ifade ile istatistik biliminde yaygın olarak kullanılan normallik, doğrusallık gibi varsayımların tahminleriyle ilgilenen bir bilim dalıdır. Ölçü grubundaki kaba hatalı ölçüler, ölçü grubunun dağılımına uymazlar ve klasik istatistik yöntemleri için tehlikeli olurlar. Uyuşumsuz ölçüler problemi istatistik kadar eski bir konudur. Klasik istatistik çözüm yöntemlerinde verilerin normal dağılımda olduğu ve kaba ve sistematik hatalardan arındırıldığı kabulleri yapılarak çözüm yapılır. Parametrik model tabanlı klasik istatistik yöntemleri, optimal modeller olarak ele alınırlar fakat yalnızca doğru yaklaşımların yapıldığı durumda doğru sonuç verirler. Bu modeller özellikle veri grubu dağılımının çok küçük ve görülemeyen sapması durumunda oldukça zayıf kalırlar.

Robustluk problemi uzun yıllardır bilinmektedir fakat uygulamaya geçmesi oldukça geç olmuştur. Bu istatistik yöntemiyle, klasik olarak kullanılan istatistik yöntemleriyle oldukça zor olarak yapılan geniş ve karmaşık ölçü gruplarının analizi daha kolaylaşmıştır ve bu yöntemle ilgili yapılan yayınlar da çoğalmıştır. Robustluk problemi ile ilgili çeşitli yaklaşımlar vardır. Bazıları genellemeyi ve sağlamlık fikrini özetlemeyi tercih ederken diğerleri farklı topoloji ve farklı matematiksel yönlerden sağlamlıkla ilgilenir. Gerçek hayatta robustluk probleminin başlıca özelliklerini açıklayan yeni istatistiksel yaklaşımlar geliştirilmiştir. Bu yaklaşımlar deneysel robustluk probleminin tanımındaki belirsizliklerin daha kolay açıklanmasını sağlarlar. Bu şekilde gelişmeler, sağlamlık yönünden var olan istatistiksel analizleri karşılaştırılması ve değerlendirilmesi durumunu ortaya çıkarmıştır. Sonuç olarak, şimdiye kadar bilinen yöntemlerden daha iyi ve bilinen durumların dışında da kullanılabilen yeni robust kestirim yöntemleri önerilmiş ve geliştirilmiştir.

Veri analizi pratikte şu gibi sorulara cevap verir: Veriler ve bu verilerden üretilen sonuçlar aynı mı? Yoksa verilerin bir kısmı farklı şeyler mi gösteriyor? Verilerin çoğunluğunun gösterdiği nedir? Hangi azınlık veri farklı ve nasıl davranmaktadır? Son çözümlerde verinin farklı kısımlarının etkisi nasıldır? Son çözümlerde ya da model seçiminde kritik etkili olan veriler hangileridir ve nasıl analiz edilmelidirler? Model ne kadar kaba hatayı ortaya çıkarabilir ya da sonuçları etkilemeden kullanabilir? Hangi model en büyük güveni sağlar ve hangi model güvenli ve verimlidir? Kesin ve kesin olmayan sabitler için güven aralığı nedir? Model kabulleri yaklaşık olarak alınırsa çözümler hangi güvende olurlar? Veri analiziyle bu sorulara cevap aranırken sağlamlık teorisinin analizi de yapılmalıdır.



Şekil 14. Model varsayımlarından olan çeşitli sapmalar

Robust istatistik, yönetilebilir istatistiksel yöntemlerin davranışlarıyla ilgili bilgilerin elde edilmesini sağlayan bir yöntemdir ve gereksiz ve fazla matematiksel yorumlama olarak düşünülmemelidir. Bu yöntem, idealize edilmiş varsayımlardan sapmaları ve ilişkili modelleri gösteren yaklaşık parametrik model olarak tanımlanabilir. Robust istatistik parametrik model istatistiğine robustluk görüşünü ekleyerek ilaveler yapar ve değişmez parametrik modellerden daha geniş şekilde komşuluk ilişkilerini inceler. Robust istatistiğin ana amaçları;

i. Veri yığınını en uygun yapıda tanımlamak: Parametrik model çözümüyle sonuçlar elde edilir ve uyuşumsuz gözlemler veri grubundan çıkarılırsa kalan verilerden veri grubunun dağılımı elde edilir. Bu durumda bazı yaklaşıklıklar kabul edilerek çözüm yapıldığı için alınan sonuçlar bağımlıdır. Veriler dağılıma uymayan bir kısmı da hala içermektedir. Ayrıca seçilen modelin testi ve uygun modelin seçimi gibi durumlarda parametrik modelin geçerliliğinin de analiz edilmesi gerekir. Geniş bir modelin testinde parametreler sıfıra eşitlenerek kesin olup olmadıkları test edilebilir ve robust test teorisi uygulanır.
ii. Veri noktalarının sapmalarını ya da eğer isteniyorsa daha iyi inceleme için temel sapmayı belirlemek: Robust çözümle bulunan düzeltmeler uyuşumsuz değerleri otomatik olarak göstermeye uygun yapıdadır. Diğer çözüm yöntemlerinde uyuşumsuzluklar birçok veri noktasını etkiler ve düzeltmelerden hesaplanan karesel ortalama hatayı da büyütürler.

Küçük ve dengeli veri gruplarında verilerin görsel olarak dikkatlice incelenmesiyle uyuşumsuzlukların belirlenebilmesi hala mümkünken dengesiz, büyük boyutlu ve geniş veri gruplarında bu işlem bilgisayarla yapılmasına rağmen mümkün değildir. Ayrıca uyuşumsuzların analizinde kullanılan bazı kuralların güvensiz olduğu unutulmamalıdır. Bazı durumlarda sadece %10 uyuşumsuzluğa izin verilir ve çok kolay bir şekilde de model kırılabilir.

iii. Çok etkili veri hareket noktalarını belirlemek ve bu noktalar için uyarıda bulunmak: Birçok parametrik model için etkili robust modelleri bulmak mümkünken, veri noktalarının azlığı durumunda bu değişir. Veri grubunun dağılımında farklı bir yerde çıkan gözlem diğerleriyle aynı ağırlıkta alınırsa ya da gözlem uyuşumsuz olarak ele alınıp ağırlıklandırılmazsa sonuçlar bozulur. Bu durumda uygun çözüm için iki robust regresyonu kullanılmalı ve birinde hareket noktaları olarak adlandırılan noktaların ağırlıkları düşük alınmalıdır. Hareket noktalarının tam olarak bilinememesi büyük bir problemdir.

iv. Beklenmedik seri korelasyonlar ya da genel korelasyon yapısından oluşan sapmalardan bahsetmek: Robust teorisi dağılım şeklindeki sapmaları inceler. Uyuşumsuzluklar için güven aralığında örnek büyüklükler için test yapılır fakat tam olarak onlardan bahsedilmez. Ayrıca çeşitli bağımsız veri gruplarındaki eğilimlerde analiz edilmelidir. Küçük fakat yüksek korelasyonlu uyuşumsuzlukların analizi çok zordur. Oldukça tehlikeli güven aralığı ve geniş örnekleme tabanlı testlerde toplanırsa yığılma olabilir .

Robust istatistik, istatistikte yaygın olarak kullanılan birçok dağılım modeline göre gerçeğe en yakın yaklaşım olması ve veri grubundaki kaba hataların varlığı ve analizi için kullanılan diğer birçok yöntemin deneysel olması nedeniyle uyuşumsuz ölçülerin belirlenmesi için kullanılabilen etkili bir yöntemdir. Robust kestirim yöntemi ile çözümde, ölçülerin düzeltmelerinin küçük hatalardan ve diğer ölçülerin hatalarından etkilenmemesinin yanında ölçü hatalarının sonuçlar üzerindeki bozucu etkileri azaltılmakta, hatta yok edilmektedir.

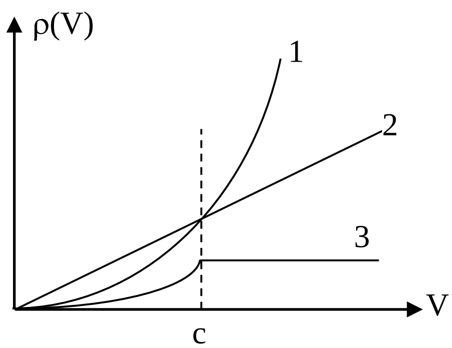
Herhangi bir büyüklüğün ölçü değeri hem büyüklük hem de çeşitli nedenlerle oluşan hatalarla ilgili bilgi içerir. Ölçülerin geometrik ve fiziksel koşulları da sağlayan gerçek değerlerine yakın büyüklüklerinin hesabında hataların belirlenip ayıklanması büyük bir öneme sahiptir. Ölçü kümelerinde kaçınılmaz olan uyuşumsuzluklar birçok veri noktasını çeşitli şekillerde etkiler ve yapılan istatistik test sonucuna yansırlar. Uygulanan istatistik test sonuçları içerdiği uyuşumsuzlukların tanısında zorlanır. Huber'e göre uyuşumsuz ölçüler ayrı bir kümeden çıkmış veri grubudur. Bu şekildeki bir ölçü grubunun dağılım fonksiyonu,

$$F(x) = (1-\xi)\,F_0(x) + \xi\,H(x) \tag{91}$$

şeklinde yazılabilir. Burada F(x); tüm ölçülerin dağılım fonksiyonunu, $F_0(x)$; uyuşumlu ölçülerin dağılım fonksiyonunu, H(x); uyuşumsuz ölçülerin dağılım fonksiyonunu, ξ ise bozulma derecesini göstermektedir. Uyuşumlu ve uyuşumsuz ölçülerin dağılım fonksiyonları farklı normal dağılımdadır ve μ_i ortalama değerleri ve σ_i^2 varyansları da farklıdır. (91) eşitliğindeki dağılım fonksiyonu şu şekilde de yazılabilir.

$$F(x) = (1-\xi)\,N(\mu_1, \sigma_1^2) + \xi\,N(\mu_2, \sigma_2^2) \tag{92}$$

Robustluk kavramı; ölçü kümesindeki küçük değişimlere ya da sapmalara karşı duyarsız bir dağılımdan elde edilen kestirim olarak ele alınabilir. Ölçü kümesindeki herhangi bir elemanın değişiminin bu kümeden kestirilecek değerlere nasıl yansıyacağı aşağıdaki şekilde gösterilmektedir.



Şekil 15. Minimumlaştıran çeşitli fonksiyonlar

Şekil 15'de, $\underline{V}$ düzeltmeleri, $\rho(\underline{V})$ ise bu düzeltmelerin fonksiyonunu göstermektedir. Ölçü kümesinde $\rho(\underline{V})$ fonksiyonunu minimumlaştırmak için bir kısım parametrelerin kestirileceği ve parametrelerin kestirim değerlerinin bulunacağı varsayılmaktadır. Şekildeki fonksiyonlardan (1), $\underline{V}$'lere göre oldukça duyarlıdır ve $\underline{V}$ değerinin artmasıyla $\rho(\underline{V})$ fonksiyonu hızla büyümektedir. (2) de ise $\underline{V}$'lere göre değişim (1)'den oldukça az olmaktadır. Buradan bu fonksiyonların türevleri alınarak minimumlaştırılmak suretiyle elde edilecek kestirim değerlerinde (2)'nin kestirim değerleri (1)'in kestirim değerlerinden daha robust (sağlam)'dır. (3) fonksiyonu ise en robust fonksiyondur. Bu fonksiyonlar sırasıyla EKKY, En Küçük Mutlak Toplam Yöntemi (L_1-norm, EKMT) ve M-Kestirim yöntemidir. Şekil 15'den görülebileceği gibi $\rho(\underline{V}) = \underline{V}^2$ toplamlarının minimumlaştırıldığı EKKY kestiriminde, $\underline{V}$ düzletmeler vektörü ölçü hatalarına karşı oldukça duyarlıdır. Bunun anlamı büyük ölçü hatalarının bu kestirim yöntemiyle elde edilecek kestirim değerlerini çok fazla etkileyeceği ve saptıracağıdır. Bu durumda $\underline{V}$'ler daha az duyarlı fonksiyonlarla minimumlaştırılmalı ve kestirim değerleri robust yapılmalıdır. EKKY ile kestirimin olumsuz yönleri daha az duyarlı kestirim yöntemlerinin geliştirilmesine neden olmuştur. Robust kestirimin amacı; kaba hatalı ölçülerden ve bir kısım bozulmuş ölçü kümesinden etkilenmeden sonuç veren güvenilir kestirimler elde etmektir .

Robust Kestiriminin EKKY İle Çözümü (Maksimum Olasılıklı Kestirim)

Robust kestirimi kısaca "uyuşumsuz ve sınır değerdeki ölçülerin dağılım fonksiyonunu etkilememesi durumu" şekilde tanımlanabilir. Robust kestirimi, EKKY'nin ağırlıklı iteratif çözümünde kullanılarak etkili sonuçlar elde edilebilir. Bu EKKY'ndeki ağırlıklı karelerin toplamının min. olması yerine düzeltmelerin başka bir fonksiyonunun min. olması durumudur. Robust kestirim genel bir $\rho(\underline{V})$ amaç fonksiyonu minimumlaştırılmaktadır. Bu durumda robust kestirim için bu eşitlik şu şekle gelir.

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \, \rho\left(V_i\right) = \text{min.} \tag{93}$$

Bu eşitlikte $\rho(\underline{V}) = \underline{V}^2$ alınırsa EKKY'nin amaç fonksiyonunun elde edileceği görülmektedir. Buradan EKKY eşitliğinin, (93) eşitliğinin bir özel hali olduğu anlaşılır.

Bir fonksiyonun minimum olması için, bilinmeyenlere göre türev almak ve çıkan fonksiyonu sıfıra eşitleyerek çözüm yapıldığı bilinmektedir. Bu durumda (93) eşitliğinde $\underline{V}$ değerlerine göre türev alınarak bulunan eşitlik sıfıra eşitlenir ve çözüm yapılır. Fakat bu durumda elde edilen eşitlikler doğrusal olmayabilir. Doğrusal olmayan denklem çözümlerinin doğrusal denklem çözümlerinden farkı yinelemeli olmalarıdır. $\rho(\underline{V}) = \underline{V}^2$ amaç fonksiyonuyla elde edilecek çözümden doğrusallaştırma ile elde edilen normal denklemler çözülerek kestirilecek parametreler elde edilir. Bu durumda robust kestirim algoritması EKKY algoritmasına indirgenerek çözüm yapılabilir.

Amaç fonksiyonu ya da kayıp fonksiyonu olarak adlandırılan $\rho(\underline{V})$ fonksiyonunu seçimine göre çeşitli kestirici fonksiyonlar tanımlanmıştır. $\rho(\underline{V})$ fonksiyonunun $\underline{V}$'ye göre türevi $\psi(\underline{V})$ ile gösterilir ve bu fonksiyona etki (kestirim) fonksiyonu denir. Robust sonuç elde etmek için etki eğrisi sürekli ve sınırları belirli olmalıdır. Robust kestirim yönteminde tanımlanan amaç ya da kayıp fonksiyonu $\rho(.)$, etki fonksiyonu $\psi(.)$ ve ağırlık fonksiyonu W(.) için uygulamada çeşitli fonksiyonlar alınmaktadır. Bu fonksiyonlardan yalnızca birinin belirlenmesi diğerlerinin belirlenmesi ve çözüm için yeterli olmaktadır. Çeşitli kaynaklarda robust kestirim amacıyla kullanılan 70'e yakın fonksiyonun olduğu belirtilmektedir. Kestirici fonksiyonlar, $\underline{\ell}$ ölçüleri, $\underline{X}$ bilinmeyenler ve dengeleme yoluyla belirlenen parametreler arasındaki ilişkiyi ifade ederler.

$$\hat{\underline{\ell}} = F_i(\ell_1, \ell_2, \ldots\ldots, \ell_n) \qquad (94)$$

F_i kestirici fonksiyonları, ölçüler tam olarak normal dağılıma uymasalar bile, eğer $\hat{\underline{\ell}}$'nin kabul edilebilir bir değerini verirlerse robust özelliğe sahip olurlar. Robust kestirici fonksiyonları genel olarak R-kestiricileri, L-kestiricileri ve sınıf testlerinden çıkarılan M-kestiricileri olarak sınıflandırılabilir.

R-Kestiricileri: Rank testlerinden çıkarılan kestiricilerdir. Gözlemlerin rankları istatistiksel olarak küçükten büyüğe veya büyükten küçüğe doğru sıralanarak tanımlanabilir. R-kestiricileri, geniş veri yapılarındaki yetersizlikleri ve karmaşıklıklarından ötürü kullanışlı değillerdir. Bu nedenle istatistik kaynaklarında R-kestiricileri ile ilgili geniş bir bilgi yoktur.

L-Kestiricileri: İstatistik kuralların doğrusal kombinasyonuna dayalı L-kestiricileri (Line estimators) robust kestirim yöntemleri arasında daha az öneme sahiptirler. Hesaplama yöntemleri kolay olmasına rağmen etkili çözümler vermemesi, doğrusal programlama veya diğer bazı tekrarlı yöntemlerle çözüme ulaşması, robust kestirim algoritmasına uygun olmaması L-kestiricilerinin kullanılabilirliğini kısıtlamaktadır. L-kestiricileri özellikle konum parametrelerinin belirlenmesi durumunda kullanışlıdır.

M-Kestiricileri: Maksimum olasılık kestiricileri olarak da adlandırılan bu kestiriciler şu şekilde tanımlanır. Ölçüleri ve bilinmeyenleri arasında doğrusal fonksiyonel bir ilişki olan veri grubunun olasılık fonksiyonu olarak $F_{(\underline{x},\underline{\ell})}$ alınırsa,

$$L(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} F_{(\underline{x},\underline{\ell})} \tag{95}$$

fonksiyonunu en büyük veya eşit olarak,

$$\mathrm{Log}L(\underline{X}) = -\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Log}\, F_{(\underline{x},\underline{\ell})} \tag{96}$$

$$\rho_{(\underline{x},\underline{\ell})} = -\mathrm{Log}\, F_{(\underline{x},\underline{\ell})}$$

olmak üzere

$$\mathrm{Log}L(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} \rho_{(\underline{x},\underline{\ell})} \tag{97}$$

şeklinde tanımlanan (97) eşitliğini en küçük yapan $\underline{X}$ çözümü aranır. M-kestiriminde $\rho(.)$ fonksiyonunun seçilmesi ölçülerin $F(\underline{\ell})$ olasılık fonksiyonunun seçilmesi anlamına gelmektedir ve bu ilişki (96) eşitliğinden,

$$F_{(\underline{x},\underline{\ell})} = e^{-\rho(\underline{x},\underline{\ell})} \tag{98}$$

ile gösterilir. M-kestiricileri EKKY tekniklerini uygulamaları ve kestirim yöntemlerinin genel özelliklerini sağlayabildikleri için genellikle daha çok kullanılan ve tercih edilen kestiricilerdir. Bu nedenle istatistik kaynaklarda özellikle M-kestiricileri üzerinde durulmuştur.

Huber (1964), bir dağılımın konu parametresi için Maksimum Likelihood kestiricisinin genelleştiricisi olan M-kestiricisini ortaya çıkarmıştır. Bu kestirim değeri, (96) eşitlikleri, bilinmeyenleri ve EKKY ile çözümde kurulan fonksiyonel model dikkate alınarak (34) eşitliğinden,

$$M = \sum_{i=1}^{n} \rho_{(\underline{X}, \underline{\ell}_i)} = \sum_{i=1}^{n} \rho\left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} X_j - \ell_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \rho\big(V_i \big) = \min. \tag{99}$$

yazılabilir. Burada $\rho(.)$; sıfır noktasında minimum olan düzeltmelerin bir fonksiyonudur. Bu eşitliğinin çözümünden,

$$\underline{A}^T \psi(\underline{V}) = \underline{A}^T \psi(\underline{A}\underline{X} - \underline{\ell}) = 0 \tag{100}$$

eşitliği yazılabilir. $\underline{X}$ bilinmeyenlerinin tek ve yakınsak olması için $\rho(.)$ fonksiyonunun konveks (dışbükey), artan ve sürekli yapıda olması gerekir.
(100) eşitliğinin çeşitli şekillerde çözümü yapılabilir. Uygulamada en çok kullanılan çözümü ise iteratif çözümdür. Bu çözüm için (100) eşitliği düzenlenirse $\dfrac{\underline{A}^T \psi(\underline{A}\underline{X} - \underline{\ell})}{(\underline{A}\underline{X} - \underline{\ell})} (\underline{A}\underline{X} - \underline{\ell}) = 0$ ve $\underline{W} = W(\underline{V}) = \dfrac{\psi(\underline{V})}{\underline{V}} = \dfrac{\psi(\underline{A}\underline{X} - \underline{\ell})}{(\underline{A}\underline{X} - \underline{\ell})}$ dönüşümü yapılırsa,

$$\underline{A}^T \underline{W}\underline{V} = \underline{A}^T \underline{W}(\underline{A}\underline{X} - \underline{\ell}) = 0 \tag{101}$$

eşitliği elde edilir. EKKY'nin normal denklemler çözümüne benzetilerek,

$$\underline{X} = \left(\underline{A}^T \underline{W} \underline{A}\right)^{-1} \underline{A}^T \underline{W} \underline{\ell} \tag{102}$$

eşitliği yazılabilir. Bu denklemin çözümü için W($\underline{V}$) fonksiyonunun yani ρ($\underline{V}$) fonksiyonunun bilinmesi gereklidir. Bu şekilde bilinen bir fonksiyonla iteratif ve yeniden ağırlıklandırılmalı EKKY ile çözüm,

$$\begin{aligned}
\underline{X}_t &= \left(\underline{A}^T \underline{W}_t \underline{A}\right)^{-1} \underline{A}^T \underline{W}_t \underline{\ell} \\
\underline{V}_t &= \left[\underline{A}\left(\underline{A}^T \underline{W}_t \underline{A}\right)^{-1} \underline{A}^T \underline{W}_t - \underline{E}\right]\underline{\ell} \\
\underline{W}_t &= \underline{P}\underline{W}_{(t-1)} \qquad t = 1,2,..... \\
\underline{W}(V_0) &= \underline{E}
\end{aligned} \tag{103}$$

şeklindedir. Burada $\underline{P}$; ölçülerin başlangıç ağırlık matrisi, t; iterasyon sayısı, $\underline{W}$=W($\underline{V}$) ise seçilen ağırlık fonksiyonudur. Başlangıç için $\underline{W}$ = $\underline{E}$ ve dolayısıyla $\underline{W}_1$ = $\underline{P}$ alınır. Bu çözüm; EKKY ile yapılan çözümden sonra $\underline{V}$ düzeltmelerinden $\underline{W}$ ağırlık matrisinin belirlenip yeniden iteratif olarak çözüm yapılması olarak özetlenebilir. Sonuçta elde edilen $\underline{X}$ bilinmeyenleri arasındaki fark belli bir sayıdan küçük olunca işleme son verilir [28], [38], [44], [45]. Bu çözümde EKKY çözümü kullanılmıştır fakat bu çözüm (99) eşitliğinde verilen M-kestirim koşulunun sağlanması için yapılmıştır. (103) eşitliğinde yeniden ağırlıklandırılmalı EKKY kestirimi ile çözümü bulunan Robust M-kestiriminde her ölçü için uygun ağırlıklar belirlenmiş ve robust bir çözüm elde edilmiştir. Bu şekilde oluşturulan EKKY algoritması robust kestirim algoritmasını oluşturmaktadır.

Bu şekilde yapılan bir çözüm sonucunda (103)'de verilen eşitliklerde uyuşumlu olan ölçülerin $\underline{X}_t$ bilinmeyenleri ve $\underline{W}_{t+1}$ ağırlıklarının değişmediği, uyuşumsuz sayılan ölçülerin $\underline{W}_{t+1}$ ağırlıklarınınsa giderek küçüldüğü ve hatta sıfıra gittiği görülmektedir. Bu durumda uyuşumsuz ölçülerin bilinmeyenler üzerindeki bozucu etkileri de giderek azalmaktadır. Bu robust kestirimin en önemli özelliklerinden birisidir ve özellikle uyuşumsuz olup olmadığı kararı verilemeyen ölçülerin analizinde önemlidir. Robust M-kestirimi şu özellikleri içerir.

1. ρ(.) konveks bir fonksiyondur,
2. Çözüm için ρ(.), ψ(.) ve W(.) fonksiyonlarının birinin bilinmesi yeterlidir,
3. Yeniden ağırlıklandırılmalı EKKY çözümü ile sonuç bulunur,

4. Her ölçü için uygun robust ağırlık belirlenir
5. Bu çözüm kaba hatalardan etkilenmez.

Robust Kestiriminde Kullanılan Kestirici Fonksiyonlar

Tablo 2'deKİ robust kestirim fonksiyonlarına bakılırsa ağırlık fonksiyonlarının genel olarak tüm V_i'ler için tanımlı fonksiyonlar ve birden fazla bölge için tanımlı fonksiyonlar şekilde ortaya çıktığı görülebilir.

Robust kestiriminde veri grubundaki gözlemlerin ağırlıkları en uygun şekilde belirlenmekte ve veri grubundan gözlem çıkarılmaksızın bilinmeyenlerin çözümü yapılmaktadır. Seçilen ağırlık fonksiyonlarının şu özelliklere sahip olması istenir.

- Sınır değerden küçük $\underline{V}_i$'ler için bu ağırlık 1 dolayında olmalı,
- Sınır değerden büyük $\underline{V}_i$'ler için ağırlıklar V_i ile ters orantılı birdenbire küçülmeli,
- Sınır değerden biraz büyük $\underline{V}_i$'ler için ağırlık 0.60-0.70 civarında olmalıdır.

Robust Kestirim algoritmasında yakınsama, seçilecek ağırlık fonksiyonu yanında problemin türüne, kondisyonuna, kaba hataların sayısına, büyüklüğüne ve dağılımına da bağlıdır. Aynı zamanda ikinci grup ağırlık fonksiyonlarında sınır değer olarak seçilen bir c parametresi kullanılmaktadır. c sınır değeri için gerçekçi değerlerin alınması daha sağlıklı sonuçlar elde etmek için önemlidir.

Huber kestiricileri ortada normal, kuyruklarda çift üslü olan bir hata modeline dayanır. Yani Huber kestirimin model hatası Gauss merkezli ve Laplace eğrisi ile bir yoğunluk fonksiyonuna dayanır. c karşılaştırma (sınır) değeri için istatistikçiler $1.5\sigma_0$, $2\sigma_0$ gibi sabit değerler almaktadırlar fakat gerçek hata modellerine göre değişebilir.

Tablo 2. Robust kestirim fonksiyonları

Yöntem	**Sınır**	**Amaç Fonksiyonu**	**Etki Fonksiyonu**	**Ağırlık Fonksiyonu**

K **EKKY**		$\frac{1}{2}V^2$	V	1
H **Huber**	$\lvert V\rvert \le c$	$\frac{1}{2}V^2$	V	1
	$\lvert V\rvert > c$	$c\lvert V\rvert - \frac{1}{2}c^2$	c	$\frac{c}{\lvert V\rvert}$
A **Andrews**	$\lvert V\rvert \le c\Pi$	$c^2\left(1-\mathrm{Cos}\,\frac{\lvert V\rvert}{c}\right)$	$c\,\mathrm{Sin}\,\frac{\lvert V\rvert}{c}$	$\left(\frac{\lvert V\rvert}{c}\right)^{-1}\mathrm{Sin}\,\frac{\lvert V\rvert}{c}$
	$\lvert V\rvert > c\Pi$	$2c^2$	0	0
B **Beaton-Tukey**	$\lvert V\rvert \le c$	$\frac{c^2}{6}\left(1-\left(1-\left(\frac{V}{c}\right)^2\right)^3\right)$	$\lvert V\rvert\left(1-\left(\frac{V}{c}\right)^2\right)^2$	$\left(1-\left(\frac{V}{c}\right)^2\right)^2$
	$\lvert V\rvert > c$	$\frac{1}{6}c^2$	0	0
D **Danimarka**	$\lvert V\rvert \le c$	$\frac{1}{2}V^2$	V	1
	$\lvert V\rvert > c$	$-\left(c^2 + c\lvert V\rvert\right)e^{\frac{-\lvert V\rvert}{c}}$	$\lvert V\rvert e^{\frac{-\lvert V\rvert}{c}}$	$e^{\frac{-\lvert V\rvert}{c}}$
T **EKMT**		$\lvert V\rvert$	1	$\frac{1}{\lvert V\rvert}$

Robust Kestirim Yöntemleri İçin c Parametresinin Belirlenmesi

Robust Kestirim yöntemlerinde kullanılan c parametresinin değeri, genellikle problemlerin karakteristik özelliklerinden bağımsız olarak ve tecrübelere dayanarak seçilmiştir. c parametresi kestirim yönteminde karşılaştırma değeri olarak kullanılır ve önemli bir role sahiptir. Bir başka deyişle c parametresi, gözlem hatalarının belirli bir olasılıkla ±c sınırları içinde dağılmış olacağı varsayımına bağlı olarak ortaya çıkar. Bazı robust kestirim yöntemlerinde kullanılan c parametreleri olasılığa bağlı değildir. Örneğin Andrews'in M-kestirim yöntemi için önerilen üç adet c değerinin, sırasıyla hangi yanılma olasılığının karşılık geldiğini bilinmemektedir. Bunun yanında Danimarka yöntemi için $\alpha = 0.001$ yanılma olasılığında ile $c = 3.29$ değeri verilmektedir fakat c parametre değeri A tasarım matrisine bağlantılı olmamaktadır [28].

İstatistikçiler c parametresi için, k = 1.5, 2 gibi herhangi bir katsayı olmak üzere, $c = k\sigma$ gibi sabit değerler almaktadır. σ , ölçü kümesini temsil eden öncül bir değerdir ve $|V| < c$ yerine $\frac{|V|}{\sigma} \leq k$ da alınabilir. Uyuşumsuz ölçüler testinde σ yerine, V'lerin standart sapmaları $\sigma_{V_i} = \sigma_0 \sqrt{q_{V_i V_i}}$ alınmaktadır. Bu durumda α yanılma olasılığı ile $E\{\nabla \ell_i\} = 0$ H_0 hipotezinin geçerli olabilmesi için,

$$\frac{|V_i|}{\sigma_0 \sqrt{q_{V_i V_i}}} \leq t_{f,1-\alpha/2} \tag{108}$$

olmalıdır Öyleyse,

$$c_i = \sigma_0 \sqrt{q_{V_i V_i}}\, t_{f,1-\alpha/2} \tag{109}$$

yazılabilir. Dengeleme probleminde, $\underline{P} \neq \underline{E}$ farklı ağırlıkların söz konusu olması durumunda (109) eşitliği,

$$c_i = \sigma_0 \sqrt{q_{V_i V_i}} \sqrt{P_i}\, t_{f,1-\alpha/2} \tag{110}$$

şekline gelir. Ağırlık fonksiyonları olarak, Andrews ya da benzeri bir trigonometrik fonksiyon alınırsa, sınır değer $c\Pi$ olacağı için (109) ya da (110) eşitliklerinin sağ yanlarının Π'ye bölünmesi gerekmektedir .

c parametresinin bu eşitliklerle belirlenmesinde σ_0 kuramsal degerinin kestirilmesi büyük önem taşır. σ_O öncül değeri tam olarak belirlenemiyorsa yerine m_0 karesel ortalama hata alınır. Daha öncede açıklandığı gibi veri grubundaki uyuşumsuz ölçüler sonuçları etkilemekte ve karesel ortalama hatayı büyütmektedir. Bu nedenle σ_O, EKKY ile elde edilen m_0'la sağlam kestirilemez. Bu sakıncayı ortadan kaldırmak için kaynaklarda çeşitli öneriler yer almaktadır. Bu önerilerden biri σ_0 kuramsal değeri yerine aşağıdaki şekilde hesaplanabilecek bir s_0 değerinin kullanılmasıdır.

$$s_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} W_i V_i^2}{\sum_{i=1}^{n} W_i} \tag{111}$$

Bunun için başlangıçta ilk önce V_i düzeltmeleri ve m_0 karesel ortalama hata EKKY ile bulunduktan sonra yeni geçici ağırlıklar (W_i'ler), (103) eşitliğine göre hesaplanır. Daha sonra d_i sınır değerini aşan düzeltmeler atılır.

$$W_i = \begin{cases} W_i & V_i < d_i = m_0 \sqrt{W_i} \sqrt{Q_{V_i V_i}}\; t_{f,1-\alpha/2} \\ 0 & V_i \geq d_i = m_0 \sqrt{W_i} \sqrt{Q_{V_i V_i}}\; t_{f,1-\alpha/2} \end{cases} \tag{112}$$

Geriye kalan veri grubundaki ölçü sayısı küçükse sağlam olarak kestirilen s_0 bir düzeltme çarpanı ile küçültülür. Düzeltme çarpanı için aşağıda verilen formül önerilir. k. dereceden küçültülmüş s_o ve c_i sınır degeri,

$$s_0 = s_0 \left(\frac{n-u}{n} \right)^k \quad k = 1,2,3,..... \tag{113}$$

$$c_i = s_0 \sqrt{W_i} \sqrt{q_{V_i V_i}}\; t_{f,1-\alpha/2} \tag{114}$$

olarak hesaplanabilir [40]. Benzer şekilde (70) ve (71) eşitliklerinden k adet uyuşumsuz ölçünün global testi için hesaplanabilecek t veya T değerlerine bağlı belirli bir olasılık seviyesini kullanarak farklı yöntemler için uygun parametreleri seçebiliriz. Yanılma olasılığı α alınırsa, (71) eşitliğinden kritik değer $t_{\alpha/2}$ olur.

$$P_T = \left[\frac{V_i}{\sqrt{\left[\underline{A}_i \left(\underline{A}_i^T \underline{P}_i \underline{A}_i \right)^{-1} \underline{A}_i^T + \underline{P}_i^{-1} \right]} m_{01}} \leq t_{(n-k-u),1-\alpha/2} \right] = 1 - \alpha \tag{115}$$

Böylece güven aralıkları için,

$$V_i \leq \sqrt{\left[\underline{A}_i\left(\underline{A}_i^T\underline{P}_i\underline{A}_i\right)^{-1}\underline{A}_i^T+\underline{P}_i^{-1}\right]}\,m_{01}\,t_{(n-k-u),1-\alpha/2} \tag{116}$$

yazılabilir. Buraya kadar yapılan işlemler, sırasıyla Huber, Andrews, Beaton-Tukey, Danimarka ve EKMT yöntemlerine uygulandığı zaman, uygun yanılma olasılıkları ile teorik temellere dayanan c parametrelerinin seçilmesi mümkündür. Örneğin Huber'in M-kestirimi için (P=E) c parametrelerini,

$$c_i = \sqrt{\left[\underline{A}_i\left(\underline{A}_i^T\underline{A}_i\right)^{-1}\underline{A}_i^T+1\right]}\,m_{01}\,t_{(n-k-u),1-\alpha/2} \tag{117}$$

şeklinde yazabilir. Bu şekilde bir eşitlik kullanılarak keyfi önerilerin üstesinden gelinebilir. Farklı gözlemlerin, $\underline{A}$ tasarım matrisine, $\underline{P}$ ağırlık matrisine, yanılma olasılığına ve serbestlik derecesine bağlı olarak farklı c parametrelerine sahip olduğunu görmek zor değildir. Diğer kestirimler için hesaplanabilecek c parametreleri şunlardır.

$$\begin{aligned}
c_i^{AND} &= \sqrt{\left[\underline{A}_i\left(\underline{A}_i^T\underline{A}_i\right)^{-1}\underline{A}_i^T+1\right]}\,m_{01}\,t_{(n-k-u),1-\alpha/2}\,/\,\Pi \\
c_i^{TUK} &= \sqrt{\left[\underline{A}_i\left(\underline{A}_i^T\underline{A}_i\right)^{-1}\underline{A}_i^T+1\right]}\,m_{01}\,t_{(n-k-u),1-\alpha/2} \\
c_i^{DAN} &= \sqrt{\left[\underline{A}_i\left(\underline{A}_i^T\underline{P}_i\underline{A}_i\right)^{-1}\underline{A}_i^T+\underline{P}_i^{-1}\right]}\sqrt{P_i}\,t_{(n-k-u),1-\alpha/2}
\end{aligned} \tag{118}$$

Yukarıdaki eşitlikler kullanılarak, farklı yöntemler için $\underline{A}$ matrisine, öncül $\underline{P}$ ağırlık matrisine, yanılma olasılığına, serbestlik derecesine ve öncül birim ağırlıklı varyansa bağlı farklı parametreler hesaplanabilir.

2.6.2.2. Robust Kestirim Yöntemlerinin Karşılaştırılması

Robust kestirim algoritması ile Robust-M kestiriminin çözümü ve elde edilen sonuçlar yardımı ile geleneksel uyuşumsuz ölçü belirleme tekniklerinin kullanılması, Robust Kestirim yöntemlerinin EKKY teknikleriyle birleştirilmesidir.

Kestirim yöntemlerinin karşılaştırılması, hesapsal işlemlerde minimize edilen amaç fonksiyonlarına dayandırılabilir. Uyuşumsuz ölçülerin belirlenmesi amacıyla uygulamada birçok robust kestirim yöntemleri kullanılmaktadır yöntemler arasındaki fark, çözümlerde değişik kestirici fonksiyonlarının kullanılmasıdır. Amaç, düzeltme büyüklükleri yardımı ile uyuşumsuz ölçülerin başlangıç tanısı olduğuna göre, problemin türüne uygun fonksiyonun seçilmesi gerekir. Bu anlamda karşılaştırma yapmak amacıyla EKKY, EKMT, Huber'in M-kestirimi, Andrews, Beaton Tukey ve Danimarka yöntemleri seçilir ve yöntemlere ait Şekil 18'de verilen ağırlık fonksiyonları incelenirse, uyuşumsuz ölçüleri belirleme konusunda EKMT, Andrews, Beaton-Tukey, Huber'in M-kestirim yöntemi ve Danimarka yöntemlerinin yaklaşık aynı eğilimde olacağı görülür.

Geleneksel EKKY ile test yöntemlerinin uygulanmasında, uyuşumsuz olarak belirlenen ilk ölçü, ölçü kümesinden çıkarılır. Daha sonra kalan ölçüler kullanılarak, EKKY yeniden uygulanır ve parametrelerin kestirim değerleri hesaplanır. Huber tarafından sunulan M-kestiricisi, bilinen maksimum olasılıklı kestiricinin genelleştirilmiş bir şeklidir ki bu ideal model kabulünden birazcık sapan bir dağılım modelinden türetilir. Burada ideal model olarak normal dağılım kabul edilir. M-kestirimi, düzeltmelerin bir fonksiyonunun $\rho(\underline{V})$ minimize edilmesi fikrine dayandırılır. Bu fonksiyon EKKY'nde olduğu gibi düzeltmelerin karelerinin minimize edilmesi yerine, kestirim işleminde uyuşumsuz ölçülerin etkisini kontrol eder.

M-kestirimi ile geleneksel EKKY arasıdaki fark, hatalı alandaki gözlemlerle ilgilidir. Geleneksel yöntemler, dağılım dışı gözlemlerin kesinlikle silinmesi nedeniyle kesin ret yaklaşımı olarak adlandırılır. Diğer taraftan M-kestirimi, dağılım dışı ölçülerin ağırlıklarının azaltılarak modele etkisinin sınırlandırılması nedeniyle yumuşak ret yaklaşımı olarak adlandırılır.

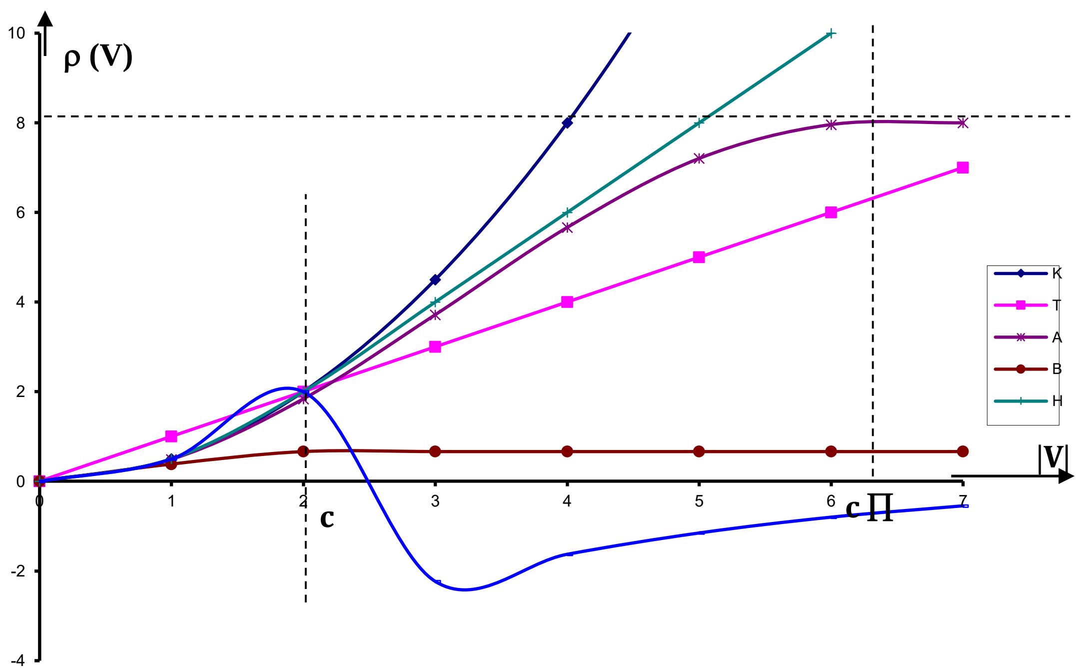
Kaba hatalardan etkilenen kestirim değerlerinin, model sapmasına direnmesi robust yaklaşımın, klasik kestirim yöntemlerine karşı bir avantajıdır. Eğer bozulmuş dağılım modelleri gerçeğe ideal modelden daha yakınsa, kestirim değerlerinin istenilen etkisinin elde edilebilmesi, bu yöntemin diğer bir üstünlüğüdür.

Çeşitli Amaç, Etki, Ağırlık Fonksiyonlarının Karşılaştırılması

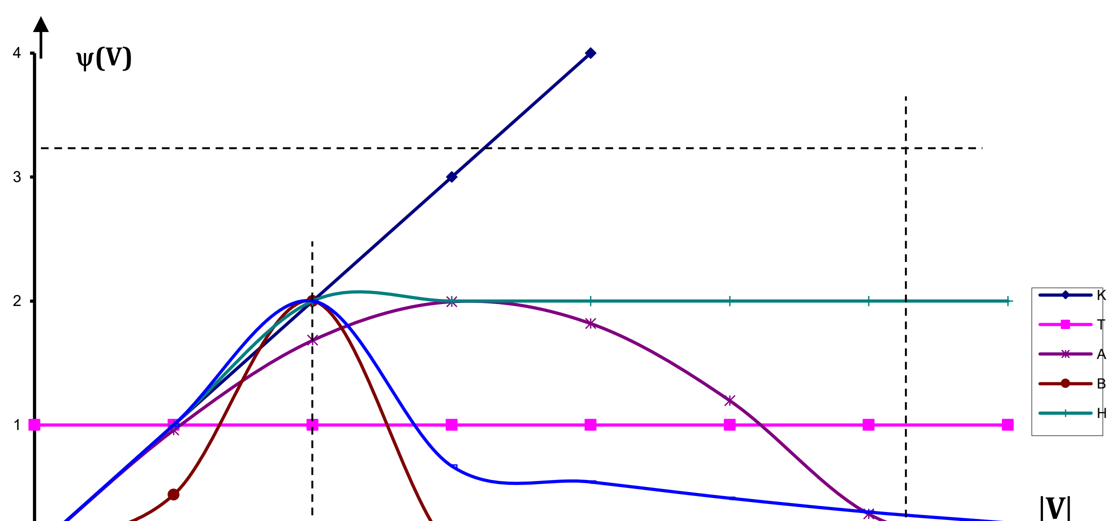
Robust kestirim fonksiyonları için amaç fonksiyonunun $\rho(\underline{V})$ türevi sınırlandırılmış nitel sağlamlık düşünülmelidir. Bu durumda EKKY nitel sağlam bir yöntem değildir, çünkü amaç fonksiyonu $\rho(\underline{V}) = \underline{V}^2$ kareseldir ve türevi $\rho'(\underline{V})=\psi(\underline{V})=\underline{V}$ doğrusal ve sınırsızdır. Sağlam bir kestirim için türevi $\psi(\underline{V})$ doğrusal olmayan, sınırlandırılmış bir fonksiyon seçilerek nitel bir sağlam kestirici oluşturulabilir. Böylece gözlemlerdeki uyuşumsuz ölçülerin kestirilen değerlere olan bozucu etkileri azaltılır.

Huber'in önerdiği $W(\underline{V})$ veya $\psi(\underline{V})$ fonksiyonları $\rho(\underline{V})$ amaç fonksiyonu $-c \leq V \leq +c$ arasında EKKY'nin amaç fonksiyonu ile aynı olmasına rağmen bu aralığın dışında EKKY'nin amaç fonksiyonu doğrusal olarak artmaya devam eder.

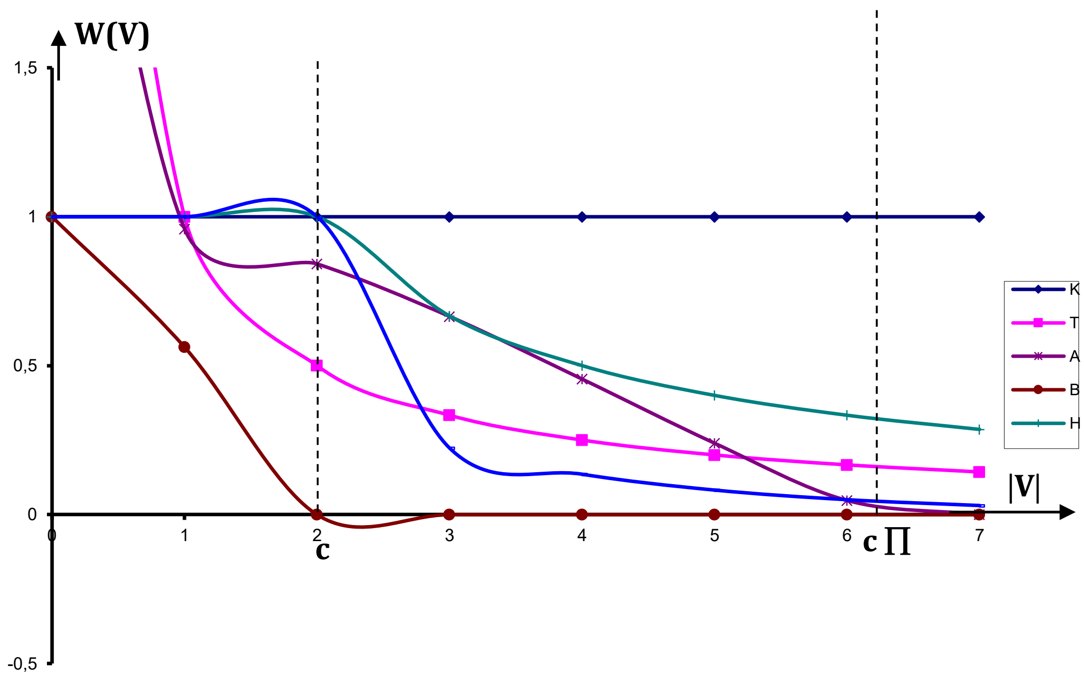
Sağlam bir kestirim için $\rho(\underline{V})$, $\psi(\underline{V})$ veya $W(\underline{V})$ fonksiyonlarından yalnız birinin seçilmesi yeterlidir. Sık kullanılan bazı kestirim yöntemlerinin, Şekil 16'da amaç fonksiyonlarının, Şekil 17'de etki fonksiyonlarının ve Şekil 18'de ağırlık fonksiyonlarının davranışları görülmektedir.



Şekil 16. $\rho(\underline{V})$ amaç fonksiyonları



Şekil 17. $\psi(\underline{V})$ etki fonksiyonları



Şekil 18. $W(\underline{V})$ ağırlık fonksiyonları